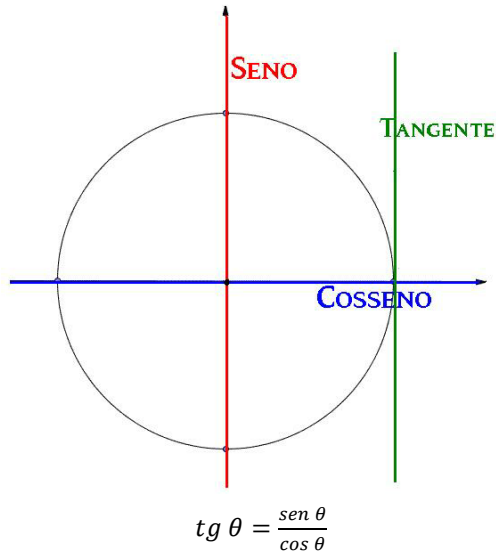


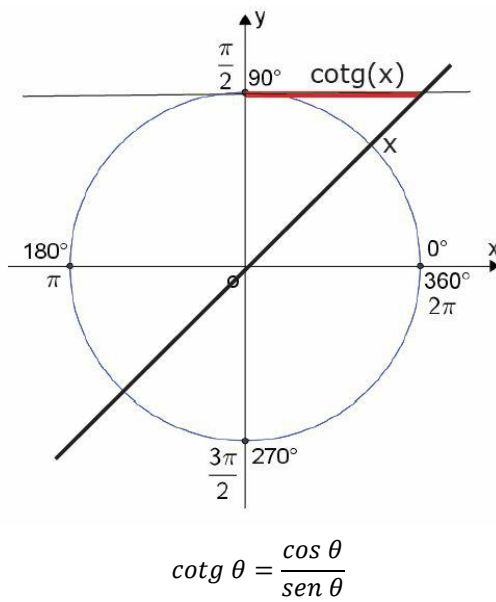
As linhas trigonométricas

Resumo

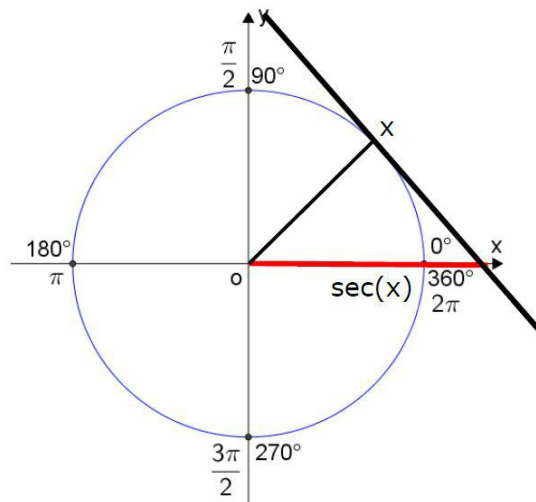
As linhas seno, cosseno e tangente



A linha cotangente

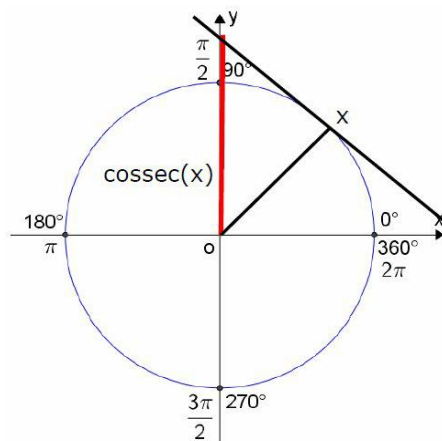


A linha secante



$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$$

A linha cossecante



$$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$$

Revisitando a relação fundamental

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

ou

$$1 + \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha, \text{ com } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

ou

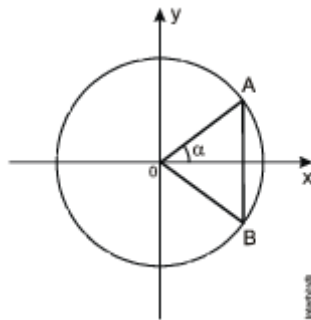
$$\cot^2 \alpha + 1 = \csc^2 \alpha, \text{ com } \alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Exercícios

- Nos X-Games Brasil, em maio de 2004, o skatista brasileiro Sandro Dias, apelidado "Mineirinho" conseguiu realizar a manobra denominada "900", na modalidade skate vertical, tornando-se o segundo atleta no mundo a conseguir esse feito. A denominada "900" refere-se ao número de graus que o atleta gira no ar em torno de seu próprio corpo, que, no caso, corresponde a

 - uma volta completa.
 - uma volta e meia.
 - duas voltas completas.
 - duas voltas e meia.
 - cinco voltas completas.

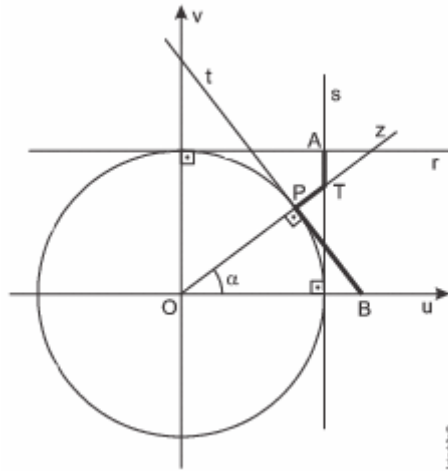
- Na figura a seguir, estão representados o ciclo trigonométrico e um triângulo isósceles OAB.



Qual das expressões abaixo corresponde à área do triângulo OAB em função do ângulo α ?

- $tg\alpha \times sen\alpha$
- $\frac{1}{2}tg\alpha \times cos\alpha$
- $cos\alpha \times sen\alpha$
- $\frac{1}{2}tg\alpha \times sen\alpha$
- $tg\alpha \times cos\alpha$

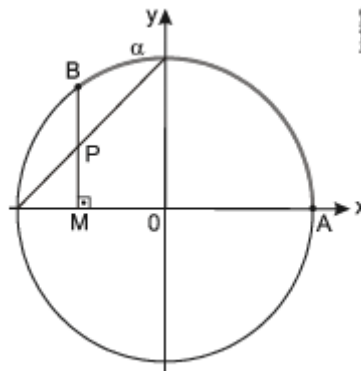
3. O ciclo trigonométrico da figura abaixo, acrescentou-se as retas r, s, t e z.



Nestas condições, a soma das medidas dos três segmentos em destaque, AT, TP e PB, pode ser calculado, como função de α , por

- a) $\sec \alpha$
- b) $\operatorname{cosec} \alpha$
- c) $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{cotg} \alpha$
- d) $\operatorname{cosec} \alpha \times \sec \alpha$

4. No círculo trigonométrico de raio unitário indicado na figura, o arco AB mede α .



Assim, PM é igual a:

- a) $-1 - \operatorname{tg} \alpha$
- b) $1 - \cos \alpha$
- c) $1 + \cos \alpha$
- d) $1 + \operatorname{sen} \alpha$
- e) $-1 + \operatorname{cotg} \alpha$

5. Considerando os valores de θ , para os quais a expressão $\frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{cosec}\theta} + \frac{\operatorname{cos}\theta}{\operatorname{sec}\theta}$ é definida, é CORRETO afirmar que ela está sempre igual a
- 1
 - 2
 - $\operatorname{sen}\theta$
 - $\operatorname{cos}\theta$
6. Considere dois ângulos agudos cujas medidas a e b , em graus, são tais que $a + b = 90^\circ$ e $4\operatorname{sen}(a) - 10\operatorname{sen}(b) = 0$. Nessas condições é correto concluir que
- $\operatorname{tg} a = 1$ e $\operatorname{tg} b = 1$.
 - $\operatorname{tg} a = 4$ e $\operatorname{tg} b = 1/4$.
 - $\operatorname{tg} a = 1/4$ e $\operatorname{tg} b = 4$.
 - $\operatorname{tg} a = 2/5$ e $\operatorname{tg} b = 5/2$.
 - $\operatorname{tg} a = 5/2$ e $\operatorname{tg} b = 2/5$.
7. Assinale a alternativa correta:
- $\operatorname{sen}(1000^\circ) < 0$
 - $\operatorname{sen}(1000^\circ) > 0$
 - $\operatorname{sen}(1000^\circ) = \operatorname{cos}(1000^\circ)$
 - $\operatorname{sen}(1000^\circ) = -\operatorname{sen}(1000^\circ)$
 - $\operatorname{sen}(1000^\circ) = -\operatorname{cos}(1000^\circ)$
8. O seno de um arco de medida 2340° é igual a:
- 1
 - 1/2
 - 0
 - 1/2
9. Sobre os ângulos 150° , $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{16\pi}{9}$ e, é correto afirmar que suas tangentes possuem valores, respectivamente:
- negativo, positivo, negativo.
 - positivo, positivo, negativo.
 - negativo, negativo, negativo.
 - negativo, positivo, positivo.
 - positivo, negativo, negativo.

10. Se $\sin(x) - \cos(x) = 1/2$, o valor de $\sin(x) \cdot \cos(x)$ é igual a:

a) $-\frac{3}{16}$

b) $-\frac{3}{8}$

c) $\frac{3}{8}$

d) $\frac{3}{4}$

e) $\frac{3}{2}$

Gabarito

1. D

Como $900^\circ = 2.360^\circ + 180^\circ$, segue que o atleta girou duas voltas e meia.

2. C

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} \Rightarrow A_{\text{triângulo}} = \frac{2\text{sen}\alpha \times \text{cos}\alpha}{2} \Rightarrow A_{\text{triângulo}} = \text{sen}\alpha \times \text{cos}\alpha.$$

3. A

Sabendo que o raio da circunferência é igual a 1 (ciclo trigonométrico) e considerando F o ponto de interseção da reta s com o eixo u, pode-se escrever:

$$\text{Raio} = OP = 1$$

$$AT = AF - TF \Rightarrow AT = 1 - \text{tg}\alpha$$

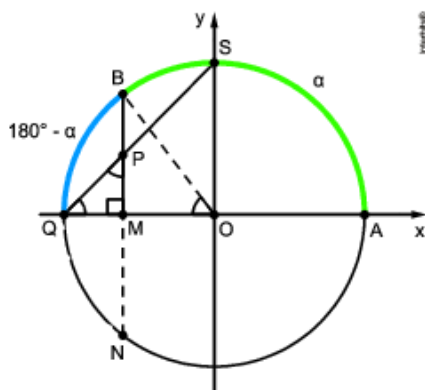
$$PT = OT - OP = OB - 1 \Rightarrow PT = \text{sec}\alpha - 1$$

$$PB = OP \cdot \text{tg}\alpha \Rightarrow PB = \text{tg}\alpha$$

$$AT + PT + PB = 1 - \text{tg}\alpha + \text{sec}\alpha - 1 + \text{tg}\alpha \Rightarrow AT + PT + PB = \text{sec}\alpha$$

4. C

Considere a figura.



Como o menor arco \widehat{AS} mede 90° e \widehat{AQS} é um ângulo inscrito, segue-se que $\widehat{AQS} = 45^\circ$. Daí, como $\widehat{BMQ} = 90^\circ$, vem $\widehat{QPM} = 45^\circ$ e, portanto, $\overline{MQ} = \overline{PM}$. Além disso, $\overline{OA} = \overline{OQ} = 1$. Donde podemos concluir que $\overline{OM} = 1 - \overline{PM}$.

Por outro lado, como $AQ \perp BM$, segue que M é o ponto médio de BM. Assim, tomando a potência do ponto M em relação à circunferência de centro O, obtemos

$$\overline{MB} \cdot \overline{MN} = \overline{MQ} \cdot \overline{MA} \Leftrightarrow \overline{MB}^2 = \overline{PM} \cdot (2 - \overline{PM}).$$

Adicionalmente, tem-se $\widehat{QCB} = \widehat{QB} = 180^\circ - \alpha$. Logo, do triângulo retângulo OBM, encontramos

$$\text{sen}(180^\circ - \alpha) = \frac{\overline{MB}}{\overline{OB}} \Leftrightarrow \text{sen}\alpha = \overline{MB}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \overline{\text{sen}}^2 \alpha &= \overline{\text{PM}} \cdot (2 - \overline{\text{PM}}) \Leftrightarrow (\overline{\text{PM}} - 1)^2 = 1 - \overline{\text{sen}}^2 \alpha \\ &\Leftrightarrow (\overline{\text{PM}} - 1)^2 = \overline{\text{cos}}^2 \alpha \\ &\Leftrightarrow \overline{\text{PM}} = 1 \pm \overline{\text{cos}} \alpha. \end{aligned}$$

Porém, como $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ implica em $\overline{\text{cos}} \alpha < 0$, segue-se que $\overline{\text{PM}} = 1 + \overline{\text{cos}} \alpha$ (pois $\overline{\text{PM}} < 1$).

5. a

$$x = \frac{\overline{\text{sen}} \theta}{\overline{\text{cossec}} \theta} + \frac{\overline{\text{cos}} \theta}{\overline{\text{sec}} \theta}$$

Temos que:

- $\overline{\text{cossec}} \theta = \frac{1}{\overline{\text{sen}} \theta}$

- $\overline{\text{sec}} \theta = \frac{1}{\overline{\text{cos}} \theta}$

Substituindo

$$x = \frac{\overline{\text{sen}} \theta}{\overline{\text{cossec}} \theta} + \frac{\overline{\text{cos}} \theta}{\overline{\text{sec}} \theta}$$

$$x = \frac{\overline{\text{sen}} \theta}{\left(\frac{1}{\overline{\text{sen}} \theta}\right)} + \frac{\overline{\text{cos}} \theta}{\left(\frac{1}{\overline{\text{cos}} \theta}\right)}$$

$$x = \overline{\text{sen}} \theta \times \frac{\overline{\text{sen}} \theta}{1} + \overline{\text{cos}} \theta \times \frac{\overline{\text{cos}} \theta}{1}$$

$$x = \overline{\text{sen}} \theta \times \overline{\text{sen}} \theta + \overline{\text{cos}} \theta \times \overline{\text{cos}} \theta$$

$$x = \overline{\text{sen}}^2 \theta + \overline{\text{cos}}^2 \theta$$

Pela relação fundamental temos que:

$$\overline{\text{sen}}^2 \theta + \overline{\text{cos}}^2 \theta = 1 \quad \text{para qualquer } \theta$$

Então, concluímos que

$$\mathbf{X=1}$$

6. e

$$a + b = 90^\circ \implies \operatorname{sen} b = \operatorname{coss} a \text{ e } \operatorname{cos} b = \operatorname{sens} a$$

$$\operatorname{sen} b = \operatorname{sen}(90^\circ - a) = \operatorname{sen} 90^\circ \operatorname{coss} a - \operatorname{cos} 90^\circ \operatorname{sens} a = \operatorname{coss} a$$

$$4 \operatorname{sens} a - 10 \operatorname{sen} b = 0$$

$$2 \operatorname{sens} a = 5 \operatorname{coss} a$$

$$\operatorname{sens} a / \operatorname{coss} a = 5/2 \implies \operatorname{tga} = 5/2$$

$$\operatorname{sen} b / \operatorname{cos} b = 2/5 \implies \operatorname{tgb} = 2/5 \quad ;$$

7. a

Note que $1000^\circ = 2 \cdot 360^\circ + 280^\circ$. Por conseguinte, sendo 280° um arco do quarto quadrante, vem que $\operatorname{sen}(1000^\circ) = \operatorname{sen}(280^\circ) < 0$.

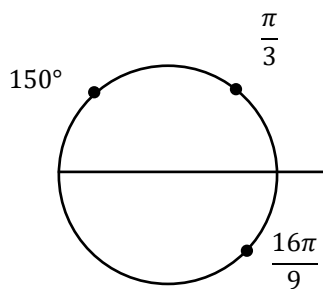
8. c

$$2340^\circ = 360^\circ \cdot 6 + 180^\circ$$

$$\operatorname{Sen} 2340^\circ = \operatorname{sen} 180^\circ =$$

9. a

Pelo ciclo trigonométrico temos que os ângulos estão representados respectivamente :



10. c

Elevando os dois lados ao quadrado temos:

$$(\operatorname{sen} x - \operatorname{cos} x)^2 = (1/2)^2$$

Desenvolvendo:

$$(\operatorname{sen} x)^2 - 2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{cos} x + (\operatorname{cos} x)^2 = 1/4$$

$$\operatorname{sen}^2 x - 2 \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{cos} x + \operatorname{cos}^2 x = 1/4$$

$$(\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{cos}^2 x) - 2 \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{cos} x = 1/4$$

Logo podemos concluir, utilizando do teorema fundamental:

$$1 - 2\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{cos} x = 1/4$$

$$1 = (1/4) + 2\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{cos} x$$

$$2\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{cos} x = 1 - (1/4)$$

$$2\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{cos} x = (4/4) - (1/4)$$

$$2\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{cos} x = (4 - 1)/4$$

$$2\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{cos} x = 3/4$$

$$4 * 2\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{cos} x = 3$$

$$8 * \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{cos} x = 3$$

$$\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{cos} x = \frac{3}{8}$$